数理解析研究所講究録
312巻 1977年 78-90

最小二乗法によるARI過程のパラメータ推定

慶応大学 工学部　川島弘尚

§1 はじめに.

Box, Jenkins [1] によって非定常過程の一つのモデルとして ARIMA 過程が導入され, その実用的な取扱故に, 広く使われるようになった。ここでは ARI 過程のパラメータ推定を通常の最小二乗法で計算することを考察し, 最小二乗推定量が一致性を持ち, しかも最良漸近正規(BAN)推定量であることを示す. AR 過程の場合には, 最小二乗推定量が一致性と最良漸近正規性を持つことはよく知られている。[2] ARI過程とAR過程は形式的には同じ定係数の差分方程式で表現できるが, 唯一の差はその特性多項式の根が単位円上にあるか否かである。単位円上あるいは単位円外に零点がある場合の最小二乗推定量の挙動は Anderson [3], Rubin [4], White [5], 最近では Stigum [6], [7] らによって考察されているが, 単位円上に零点がある場合の推定値の挙動は詳しく調べられてい

ない。

§2 問題の定式化

シフト作用素 B を $Bx(t)=x(t-1)$ で定義する。この作用素を用いると p 回階差 $\Delta^p x(t)$ は次のように書ける。

$$\Delta^1 x(t) = x(t) - x(t-1) = (1-B)x(t)$$

$$\Delta^p x(t) = \Delta^{p-1}x(t) - \Delta^{p-1}x(t-1) = (1-B)^p x(t).$$

非定常過程 $x(t)$ が以下のように書ける時に $ARI\ (n.p)$ と呼ぶ。

(1) $$(1-a_1 B - \cdots\cdots - a_n B^n)\,\Delta^p x(t) = \varepsilon(t).$$

但し，$\varepsilon(t)$ は平均零，分散 σ^2 の白色過程，$1-a_1 B - \cdots\cdots - a_n B^n = 0$ の根は単位円外に存在するものとする。$(1-B)^p$ を展開して整理すると (1) は (2) のように書ける。

(2) $$(1-\alpha_1 B - \cdots\cdots - \alpha_{n+p} B^{n+p})\,x(t) = \varepsilon(t).$$

今，n, p を既知とした $ARI(n.p)$ 過程 $x(t)$ を 0 時点から，$N+n+p-1$ 個観測したとする。この時，行列 X_N，ベクトル $\mathbb{Y}_N$，$\boldsymbol{\alpha}$，$\mathcal{E}_N$ を以下のように定義すると (2) は次のようになる。

(3) $$\mathbb{Y}_N = X_N \boldsymbol{\alpha} + \mathcal{E}_N,$$

$$\mathbb{Y}_N = \begin{bmatrix} x(n+p) \\ \vdots \\ x(n+p+N-1) \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} x(n+p-1), & \cdots\cdots, & x(0) \\ \vdots & & \\ x(n+p+N-2), & \cdots\cdots, & x(N-1) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+p} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_N = \begin{bmatrix} \varepsilon(n+p) \\ \vdots \\ \varepsilon(n+p+N-1) \end{bmatrix}, \quad X_N = \left[\mathbb{x}_N(n+p-1), \cdots\cdots, \mathbb{x}_N(0)\right].$$

一方(1)を満足する $\Delta^p x(t)$ を p 時点から $N+n+p-1$ 個観測したことにもなるので、ΔX_N, $\Delta \mathcal{Y}_N$, $\mathfrak{a}$ を以下のように定義すると(1)は(4)に等しい。

(4) $$\Delta \mathcal{Y}_N = \Delta X_N \mathfrak{a} + \mathcal{E}_N$$

$$\Delta \mathcal{Y}_N = \begin{bmatrix} \Delta^p x(n+p) \\ \vdots \\ \Delta^p x(n+p+N-1) \end{bmatrix}, \quad \Delta X_N = \begin{bmatrix} \Delta^p x(n+p-1), & \cdots, & \Delta^p x(p) \\ \vdots & & \\ \Delta^p x(n+p+N-2), & \cdots\cdots, & \Delta^p x(p+N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_N = \begin{bmatrix} \varepsilon(n+p) \\ \vdots \\ \varepsilon(n+p+N-1) \end{bmatrix}.$$

このように定義された $\mathfrak{y}$ と $\mathfrak{a}$ の関係は以下のようになる。

<u>補題1.</u> $x(t)$ を $ARI(n,p)$ とすると

(5) $$\mathfrak{y} = D\mathfrak{a} - Q\mathfrak{d}, \quad \Delta X_N = X_N D, \quad \Delta \mathcal{Y}_N = \mathcal{Y}_N + X_N Q \mathfrak{d}$$

が成立する。ここに

$$D = [\mathfrak{d}, P\mathfrak{d}, \cdots\cdots, P^{n-1}\mathfrak{d}], \ ((n+p)\times n \text{ 行列}),$$

$$\mathfrak{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \left(\begin{array}{l} (n+p)\times 1 \text{ ベクトル},\ d_j \text{ は } (1-B)^p \text{ を展開した時の } z^j \text{ の係数}, \\ \text{すなわち}, (1-B)^p = d_0 + d_1 B + \cdots\cdots + d_p B^p \end{array} \right)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ ((n+p)\times(n+p) \text{ 行列}), \quad Q = P',$$

である。

Y_N と X_N による α の最小二乗推定量は $\hat{\alpha}_N = (X_N' X_N)^{-1} X_N' Y_N$ で与えられるから推定誤差は

(6) $$\alpha - \hat{\alpha}_N = -(X_N' X_N)^{-1} X_N' \Xi_N$$

と書ける。従って N が大きい時の $(X_N' X_N)$ の挙動を調べればよいことになる。

§3 $x(t)$ の漸近的な性質

$x(t)$ の漸近的な性質を調べるために、まず $x(t)$ を定常過程 $\Delta^q x(t)$ で表現することを考える。次の補題は $x(t)$ が有限値をとる勝手な数列で成立するので、ARI 過程でも成立し特に興味があるのは $q=p$ の場合である。証明は帰納法による。

補題2. 有限値をとる数列 $\{x(t)\}$ は任意に固定した q 回階差によって以下のように書ける。

(7) $$x(t) = \sum_{j=0}^{t-q} f_{j+1}^{q} \Delta^q x(t-j) + \sum_{j=0}^{q-1} g_j^{t} \Delta^j x(j), \quad t \geq q.$$

但し、 $$f_j^q = \frac{1}{(q-1)!} \frac{(j+q-2)!}{(j-1)!}, \quad j \geq 1, \quad q \geq 1.$$

$$g_j^t = f_{t+1-j}^{j+1} = \frac{t!}{j!\,(t-j)!}$$

$X_N' X_N$ を評価するにはまず $x_N'(m)\, x_N(\ell)$ を評価すればよいが、$x(t)$ が正規過程であれば次の関係を得る。

定　理 1.　$x(t)$ を $ARI(n.p)$, $\varepsilon(t)$ を正規白色過程とする。さらに $\sum_{j=0}^{p-1} E|x(j)|^2<\infty$ であれば任意に固定した $m, \ell>0$ について，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{x_N'(m)x_N(\ell)}{N^{2p+3}}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda(m-\ell)}|H(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\,d\lambda\equiv\hat{R}(m-\ell)$$

が確率 1 で成立する。ここに $x_N'(m)=[x(m),\cdots\cdots,x(m+N-1)]$

$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{1}{1-a_1e^{-i\lambda}-\cdots-a_ne^{-i\lambda n}}\right|^2$, $H(e^{i\lambda})=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}}\ H_N(e^{i\lambda})$

in $L^2(-\pi,\pi)$, $H_N(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{\infty}h_N(j)e^{i\lambda j}$, そして

$$h_N(j)=\begin{cases}(N-j)f_{j+1}^p/N^{p+1}, & 0\le j\le N-1,\\ 0, & j\ge N,\ j<0.\end{cases}\tag{8}$$

証　明　$m-\ell=\tau>0$ としても一般性を失わない。さらに $m>p$ の場合だけを考えても本質的に変らないことは明らかである。(7) に注意をすれば，

$$x_N'(m)x_N(\ell)=\sum_{k=\ell}^{\ell+N-1}(Y_{k+\tau}+Z_{k+\tau})(Y_k+Z_k)$$
$$Y_k=\sum_{j=0}^{k-p}f_{j+1}^p\Delta^p x(k-j)$$
$$Z_k=\sum_{j=0}^{p-1}g_j^k\Delta^j x(j)$$

と書ける。簡単な計算と $\sum_{j=0}^{p-1}E|x(j)|^2<\infty$ という仮定から $\sum_{k=\ell}^{\ell+N-1}|Z_k|^2\le CN^{4p-1}$ (C は確率変数) が確率 1 で成立することに注意をすれば，$\sum_{k=\ell}^{\ell+N-1}Y_{k+\tau}Y_k$ だけを評価すればよいことが判

る。k が l から和していることに注意して，たし算の順序を入れかえると，$\sum_{k=l}^{l+N-1} Y_{k+\tau} Y_k$ の挙動を調べるには

$$\sum_{j=0}^{N_1-1}(N_1-j)f_{j+1}^p \sum_{i=0}^{N_2-1}(N_2-i)f_{i+1}^p \, \Lambda(\tau-j+i) \equiv A$$

を評価すればよい。ここに $N_1=N+l+\tau-p$, $N_2=N+l-p$,
$\Lambda(\tau-j+i)=\sum_{k=l}^{l+N-1}\Delta^p x(k+\tau-j)\Delta^p x(k-i)$ である。さらに，
$\delta_N^l(\tau-j+i)=\frac{1}{N}\sum_{k=l}^{l+N-1}\Delta^p x(k+\tau-j)\Delta^p x(k-i)-R(\tau-j+i)$ とすると，

$$A=\sum_{j=0}^{N_1-1}(N_1-j)f_{j+1}^p\sum_{i=0}^{N_2-1}(N_2-i)f_{i+1}^p \, N[R(\tau-j+i)+\delta_N^l(\tau-j+i)]=A_1+A_2,$$

と書ける。$R(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda\tau}f(\lambda)d\lambda$ に注意して，A_1 を評価すると，

$$A_1=N\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda\tau}\sum_{k=0}^{N_2-1}(N_2-k)f_{k+1}^p e^{i\lambda k}\sum_{j=0}^{N_1-1}(N_1-j)f_{j+1}^p\overline{e^{i\lambda j}}\,f(\lambda)d\lambda$$

となる。一方 $\sum_{j=0}^{N-1}(N-j)f_{j+1}^p=\frac{1}{(p+1)!}\frac{(N+p)!}{(N-1)!}$ であるから，$h_N(j)$ を(8)のように定義すれば $\sum_{j=0}^{\infty}h_N(j)=\frac{1}{(p+1)!}+\frac{c}{N}$ である。さらに $\sum_{j=0}^{\infty}|h_N(j)-h_M(j)|^2\xrightarrow[N\to\infty,\,M\to\infty]{}0$ が成立することから，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_1}{N^{2p+3}}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda\tau}|H(e^{i\lambda})|^2f(\lambda)d\lambda$$

となる。一方 A_2 を考えると，$\Delta^p x(t)$ が Gaussian で AR 過程ということから ergodic になり，従って，$\delta_N(k_N^*)=\max_{-N_1+1\le i,j\le N_1-1}|\delta_N^m(\tau-j+i)|$ が定まる。さらに $\sum_{N=1}^{\infty}E|\delta_N(k_N)|^2<\infty$ が $|k_N|\le|k_{N+1}|$, $|k_N|<N_1$ なる勝手な列 $\{k_N\}$ に対して成立することから，$\lim_{N\to\infty}\delta_N(k_N^*)=0$

が確率1で成立する。従って

$$A_2 = N^{2p+3} \sum_{j=0}^{\infty} |h_{N_1}(j)| \sum_{i=0}^{\infty} |h_{N_2}(i)| \, |\delta_N^m(\tau-j+i)|$$

$$\leq N^{2p+3}\left(\frac{c}{(p+1)!}\right)^2 \delta_N(k_N^*)$$

より、$\lim_{N\to\infty} \frac{A_2}{N^{2p+3}} = 0$ が確率1で成立する。以上をまとめれば

$$\lim_{N\to\infty} \frac{x_N'(m)\, x_N(\ell)}{N^{2p+3}} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} |H(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda) \equiv \hat{R}(\tau)$$

が確率1で成立することになる。

定理1から $(n+p)\times(n+p)$ 行列 $\hat{\mathbb{R}}$ が

$$(9) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{X_N' X_N}{N^{2p+3}} = \begin{pmatrix} \hat{R}(0), & \cdots, & \hat{R}(n+p-1) \\ \vdots & & \\ \hat{R}(n+p-1), & \cdots, & \hat{R}(0) \end{pmatrix} \equiv \hat{\mathbb{R}}$$

によって確率1で定義できる。この $\hat{\mathbb{R}}$ に関して次の命題が成立する。

<u>定　理 2.</u>　(9) で定義された $\hat{\mathbb{R}}$ は

$$\det \hat{\mathbb{R}} \neq 0$$

を満足する。

<u>証　明</u>　$\det \hat{\mathbb{R}} = 0$ とすると $\mathfrak{b} \neq 0$ が存在して $\hat{\mathbb{R}}\mathfrak{b} = 0$ となる。一般性を失うことなく $b_0 = 1$ と考えてよい。$\hat{R}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} |H(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)\, d\lambda$ はある定常過程の共分散になっているから、$\hat{\mathbb{R}}\mathfrak{b} = 0$ ということは

$$\hat{R}(\tau)=b_1\hat{R}(\tau-1)+\cdots+b_{n+p-1}\hat{R}(\tau-n-p+1),\ \tau=0,1,2,\cdots,n+p-1,$$

を満足していることになるので，差分方程式の解の一意性から $\hat{R}(\tau)$ は $n+p-1$ 次のある AR 過程の共分散に等しくなければならない。従って $|H(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)=\frac{\sigma_1^2}{2\pi}\left|\frac{1}{B(e^{-i\lambda})}\right|^2$ となる。ここに $B(e^{-i\lambda})=1-b_1e^{-i\lambda}-\cdots-b_{n+p-1}e^{-i\lambda(n+p-1)}$ である。$f(\lambda)$ の定義から結局

$$(10)\qquad |H(e^{i\lambda})|^2=\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\left|\frac{A(e^{-i\lambda})}{B(e^{-i\lambda})}\right|^2=\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\left|\frac{\hat{A}(e^{i\lambda})}{\hat{B}(e^{i\lambda})}\right|^2\equiv|\hat{H}(e^{i\lambda})|^2$$

となる。但し，$\hat{A}(e^{i\lambda})=1-a_1e^{i\lambda}\cdots-a_ne^{i\lambda n}$, $\hat{B}(e^{i\lambda})=1-b_1e^{i\lambda}\cdots-b_{n+p-1}e^{i\lambda(n+p-1)}$ である。$\hat{H}(z)$ は z の有理多項式で分母分子は $|z|<1$ で零点を持たないから $\hat{H}(z)$ は符号を除いて $\hat{H}(z)$ の外部函数 $c(z)$ に等しい [8]。一方 $H_N(z)$ は $|z|<1$ で H^2 に属するから，H^2 の完備性から $H(z)$ も H^2 に属す。(10) より同じ外部函数 $C(z)$ を用いて一意に因数分解ができて，

$$H(z)=C(z)S(z)$$

となる。ここに $S(z)$ は Blaschke 積と特異内部函数の積である。さらに $S(z)$ は $S(z)=z^{\ell}P(z)$ （ℓ は非負整数）と書けて，$P(z)$ は $|z|<1$ で正則で $P(0)\neq0$ を満足する。従って $C(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jz^j$, $P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jz^j$ とすると，

$$H(z)=\sum_{j=0}^{\infty}h(j)z^j=z^{\ell}\sum_{j=0}^{\infty}r_jz^j=z^{\ell}C(z)P(z).$$

であるから，z の 0 次の項を調べると，$h(\ell)=r_0$, $r_0=c_0p_0$ となる。外部函数 $C(z)$ は $C(z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\log|\hat{H}(e^{i\lambda})|d\lambda\right]$

で与えられるから

$$c_0 = C(0) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{\hat{A}(e^{i\lambda})}{\hat{B}(e^{i\lambda})}\right|\frac{\sigma_1}{\sigma}d\lambda\right]$$

$$= \exp\left[\log\frac{\sigma_1}{\sigma}\left|\frac{\hat{A}(0)}{\hat{B}(0)}\right|\right] \quad (\text{函数論の Jensen の公式})$$

$$= \frac{\sigma_1}{\sigma}\cdot 1 \neq 0,$$

が成立する。$\beta_0 \neq 0$ より $c_0\beta_0 \neq 0$ である。一方 $h(j)$ は

$h(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\lambda})e^{-i\lambda j}d\lambda$ で与えられるから.

$$|h(j) - h_N(j)| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{i\lambda}) - H_N(e^{i\lambda})|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

となり $h(j) = \lim_{N\to\infty} h_N(j)$ である。特に $j = \ell$ では

$$h(\ell) = \lim_{N\to\infty}\frac{N-\ell}{N^{p+1}}f_\ell^p = \lim_{N\to\infty}\frac{N-\ell}{N^{p+1}}\frac{1}{(p-1)!}\frac{(\ell+p-2)!}{(\ell-1)!} = 0$$

が成立する。結局

$$0 = h(\ell) = c_0\beta_0 \neq 0$$

となって矛盾する。すなわち $\hat{R}b = 0$ となるような $b \neq 0$ は存在しない。

<u>Remark.</u> 証明を少し修正すれば、定理1と定理2の結果は $\Delta^p x(t)$ が ARMA 過程の場合にも成立する。

§4 最小二乗推定量の漸近的な性質

今までの準備から次の定理が成立する。

<u>定 理 3.</u> $x(t)$ を $ARI(n, p)$, $\varepsilon(t)$ を正規白色過程, さらに $\sum_{j=0}^{p-1} E|x(j)|^2 < \infty$ であれば,

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\alpha}_N = \lim_{N\to\infty} (X_N' X_N)^{-1} X_N' Y_N = \alpha, \quad w.p.\ 1$$

が成立する。

<u>証　明.</u>　行列のノルムを $\|A\| = (tr\, AA')^{\frac{1}{2}}$ で定義すると，(6) より

$$\|\alpha - \hat{\alpha}_N\| = \left\| \left(\frac{X_N' X_N}{N^{\frac{2p+3}{2}}}\right)^{-1} X_N' \frac{\varepsilon_N}{N^{\frac{2p+3}{2}}} \right\|$$

$$\leq \left(tr \left(\frac{X_N' X_N}{N^{2p+3}}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\varepsilon_N}{N^{\frac{2p+3}{2}}} \right\|$$

定理2から $\lim_{N\to\infty} \left(\frac{X_N' X_N}{N^{2p+3}}\right)^{-1} = \hat{R}^{-1}$, w.p. 1 が成立し，$\varepsilon(t)$ が正規白色過程であるから ergodic になることに注意をすれば，

$$\|\alpha - \hat{\alpha}_N\| \leq C_1 (tr\, \hat{R}^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}$$

が確率1で成立する。但し C_1 は有限な値をとる確率変数である。従って　$\lim_{N\to\infty} \|\alpha - \hat{\alpha}_N\| = 0$, w.p. 1.

α と a の関係からさらに次の関係を得る。

<u>定　理4.</u>　定理3の条件のもとで，

$$\lim_{N\to\infty} \|\sqrt{N}(\alpha - \hat{\alpha}_N) - \sqrt{N}\, D(a - \hat{a}_N)\| = 0, \quad w.p.1$$

が成立する。但し $\hat{a}_N = (\Delta X_N' \Delta X_N)^{-1} \Delta X_N' \Delta Y_N$

<u>証　明.</u>　補題1の結果をつかうと，

$$\alpha - \hat{\alpha}_N = Da - Q\alpha + D\hat{a}_N - Q\alpha - D\hat{a}_N + Q\alpha - \hat{\alpha}_N$$

$$= D(a - \hat{a}_N) - (\hat{\alpha}_N + Q\alpha - D\hat{a}_N)$$

一方

$$\hat{\alpha}_N + Q\alpha - D\hat{a}_N = (X_N'X_N)^{-1}X_N'\Delta Y_N - D(\Delta X_N'\Delta X_N)^{-1}\Delta X_N'\Delta Y_N$$
$$= (X_N'X_N)^{-1}X_N'[\Delta Y_N - \Delta X_N(\Delta X_N'\Delta X_N)^{-1}\Delta X_N'\Delta Y_N]$$

であるから定理3と同じように $\Delta^p x(t)$ が ergodic であることに注意をすれば、第一項は

$$\| (X_N'X_N)^{-1}X_N'\Delta Y_N \| \leq C_1 (\mathrm{tr}\,\hat{R}^{-1})^{\frac{1}{2}} R(0)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N^{p+1}}。$$

第二項は $\Delta X_N(\Delta X_N'\Delta X_N)^{-1}\Delta X_N'$ がベキ等行列であることを使うと、

$$\| (X_N'X_N)^{-1}X_N'\Delta X_N(\Delta X_N'\Delta X_N)^{-1}\Delta X_N'\Delta Y_N \| \leq C_1 n (\mathrm{tr}\,\hat{R}^{-1})^{\frac{1}{2}} R(0)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N^{p+1}}$$

従って

$$\| \sqrt{N}(\alpha - \hat{\alpha}_N) - \sqrt{N} D(a - \hat{a}_N) \|$$
$$\leq \| \sqrt{N}(\hat{\alpha}_N + Q\alpha - D\hat{a}_N) \| \leq (n+1) C_2 (\mathrm{tr}\,\hat{R}^{-1})^{\frac{1}{2}} R(0)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N^{p+\frac{1}{2}}}$$

が成立する。但し C_2 は有限で N に無関係な確率変数である。

結局 $\lim_{N\to\infty} \| \sqrt{N}(\alpha - \hat{\alpha}_N) - \sqrt{N} D(a - \hat{a}_N) \| = 0$, w. p. 1.

良く知られているように $\sqrt{N}(a - \hat{a}_N)$ は漸近的に正規分布になる。このことを利用すれば次の定理を得る。

<u>定 理5.</u> 定理3の条件のもとで、

$$\sqrt{N}(\alpha - \hat{\alpha}_N) \xrightarrow{\text{in law}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 D \Gamma_n^{-1} D'), \text{(法則収束)}$$

が成立する。但し、$\Gamma_n = \begin{pmatrix} R(0) & \cdots & R(n-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(n-1) & \cdots & R(0) \end{pmatrix}$, $R(\tau) = E\Delta^p x(t+\tau)\Delta^p x(t)$.

すなわち $\hat{\alpha}_N$ は α の最良漸近正規（BAN）推定量である。

証 明　$\sqrt{N}(\alpha-\hat{\alpha}_N) \xrightarrow{\text{in law}} N(0, \sigma^2 \Gamma_n^{-1})$ より明らか。

参考文献

[1] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis - Forecasting and Control. Holden-Day, San Francisco.

[2] Mann, H.B. and Wald, A. (1943), On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. Econometrica 11, 173-220.

[3]. Anderson, T.W. (1959), On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations. Ann. Math. Statist. 30, 676-687.

[4]. Rubin, H. (1950), Consistency of maximum-likelihood estimates in the explosive case. In Statistical Inference in Dynamic Economic Models (Koopmans, T.C., Ed.), Wiley, New York.

[5] White, J.S. (1958), The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case. Ann. Math. Statist. 29, 1188-1197.

[6] Stigum, B.P. (1976), Least Squares and Stochastic

difference equations. J. of Econometrics. 4, 349-370.

[7] Stigum, B. P. (1974). Asymptotic properties of dynamic stochastic parameter estimates (III). J. of Multivariate Analysis. 4, 351-381.

[8] Hoffman, K. (1962). Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.